احساس ریاضی چیست؟

این ترکیب رو من خودم ساختم. شاید هم برای شما عجیب باشه و بگید که مگه می‌شه که احساس و ریاضی رو در کنار هم جمع کرد.
من اول هر ترم، سر کلاس که می‌رم یه عبارت ریاضی رو روی تختهٔ کلاس می‌نویسم. مثل

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

یا

$$x^3-6x^2+12x-9$$

چرا این کار رو انجام می‌دم؟
هدف من اینه که ببینم بچه‌های کلاس چقدر ریاضی کار کردن؟ چون اگه یک سری مسائل رو خیلی کار کرده باشی ذهنت با دیدن یه عبارت مرتبط با اون مسائل، ناخودآگاه به اون سمت کشیده می‌شه. من اسم این ویژگی رو، که در حقیقت به یاد آوردن یک سری الگوهای ریاضی از پیش دیده هست، "احساس ریاضی" گذاشتم.
حالا با چند تا نمونه براتون توضیح می‌دم که منظورم از "احساس ریاضی" چیه.

نمونه 1 ـ ببینیم می‌شه هر عبارت به شکل

$$\frac{Ax^2+Bx+D}{1+x^2}$$

رو به صورت ترکیب خطی سه عبارت زیر نوشت یا نه؟

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}\ ,\ \frac{2x}{1+x^2}\ ,\ \frac{1+x^2}{1+x^2}$$

امتحان می‌کنیم:

$$\frac{Ax^2+Bx+D}{1+x^2}=\frac{a(1-x^2)+b(2x)+c(1+x^2)}{1+x^2}\Rightarrow a=\frac{D-A}{2}\ ,\ b=\frac{B}{2}\ ,\ c=\frac{A+D}{2}$$

در عبارتهای جبری بالا روشنه که:

$$\frac{1+x^2}{1+x^2}=1$$

دو تای دیگر رو هم با یک تغییر متغیر می‌شه به صورت زیر ساده کرد.

$$x=\tan\theta\Rightarrow\frac{1-x^2}{1+x^2}=\cos 2\theta\ ,\ \frac{2x}{1+x^2}=\sin 2\theta$$

پس:

$$x=\tan\theta\Rightarrow\frac{Ax^2+Bx+D}{1+x^2}=a\cos 2\theta+b\sin 2\theta+c\ ;\ \ a=\frac{D-A}{2}\ ,\ b=\frac{B}{2}\ ,\ c=\frac{A+D}{2}$$

حالا اگه بخواهیم بُرد چنین تابعی رو پیدا کنیم خیلی راحته:

$$c-\sqrt{a^2+b^2} \le \frac{Ax^2+Bx+D}{1+x^2} \le c+\sqrt{a^2+b^2} \;\; ; \;\; a=\frac{D-A}{2} \;,\; b=\frac{B}{2} \;,\; c=\frac{A+D}{2}$$

ـ ممکنه بعضیها بگن که با مشتق راحت‌تر می‌شه چنین مسأله‌ای رو حل کرد. من حرف این دوستان رو رد نمی‌کنم. خواستم با این نمونه احساس ریاضی رو توضیح بدم، و اینکه نشون بدم که اگه به ریاضی جور دیگه‌ای نگاه کنیم، کسل‌کننده که نخواهد بود هیچ، کلی هم لذت‌بخش خواهد بود (البته ممکنه که بعضیها با این هم مخالف باشن).

تمرین ـ با روش پیشین، چطور می‌شه بُرد تابع زیر رو پیدا کرد؟

$$\frac{1}{4+x^2}$$

نمونه 2 ـ تابع $f(x)$ در عبارت زیر چیست؟

$$f(\frac{1-x^2}{1+x^2})+f(\frac{2x}{1+x^2})=1$$

باز هم، مثل قبل می‌شه نوشت:

$$x=\tan\theta \Rightarrow f(\cos 2\theta)+f(\sin 2\theta)=1$$

با توجه به اتحاد

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

روشنه که $f(x)=x^2$ یک جواب این مسأله است. تابع $f(x)=ax^2+b$ هم می‌تونه یک جواب باشه. در این صورت:

$$a\cos^2 2\theta+b+a\sin^2 2\theta+b=1 \Rightarrow a+2b=1 \Rightarrow a=1-2b \Rightarrow f(x)=(1-2b)x^2+b$$

پس $f(x)=(1-2b)x^2+b$ یک دسته جواب کلی‌تر برای این مسأله است. b یک ثابت دلخواه است.

ـ ممکنه این مسأله جوابهای دیگری هم داشته باشه، که من نمی‌دونم، اما داشتن الگوهای ذهنی باعث پیدا کردن این دسته جواب شد. بدون این چیزی که به اون "احساس ریاضی" گفتم، چه جوری می‌شه چنین مسأله‌ای رو حل کرد؟

نمونه 3 ـ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$1000x^3-30x+1=0$$

با توجه به بسط

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta \Rightarrow \cos^3\theta-\frac{3}{4}\cos\theta=\frac{1}{4}\cos 3\theta$$

ممکنه به ذهنمون برسه که با یک تغییر متغیر، مثلاً $x=r\cos\theta$، معادلهٔ بالا رو به شکل سمت چپ اتحاد بالا دربیاریم:

$$x=r\cos\theta \Rightarrow 1000(r\cos\theta)^3-30(r\cos\theta)+1=0 \Rightarrow \cos^3\theta-\frac{0.03}{r^2}\cos\theta=-\frac{0.001}{r^3}$$

$$\frac{0.03}{r^2}=\frac{3}{4} \Rightarrow r^2=0.04 \Rightarrow r=\pm 0.2 \xrightarrow{select\ r>0} r=0.2 \Rightarrow \frac{1}{4}\cos 3\theta=-\frac{0.001}{(0.2)^3} \Rightarrow \cos 3\theta=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 3\theta=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \theta=\frac{2k\pi}{3}\pm\frac{2\pi}{9} \xrightarrow{select\ 3\,angles} \theta=-\frac{4\pi}{9},\; \frac{2\pi}{9},\; \frac{8\pi}{9}$$

$$x=0.2\cos\theta \Rightarrow x=0.0347,\; 0.1532,\; -0.1879$$

نمونه 4 ـ وارون تابع زیر را بیابید.

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$$

در اینجا هم با اضافه کردن عدد 1 به تابع، یک مکعب کامل به دست می‌یاد:

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x \Rightarrow y + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Rightarrow y + 1 = (x+1)^3 \Rightarrow x + 1 = \sqrt[3]{y+1} \Rightarrow x = -1 + \sqrt[3]{y+1}$$
$$\Rightarrow g^{-1}(x) = -1 + \sqrt[3]{x+1}$$

حالا من به چه چیزی گفتم "احساس ریاضی"؟ به شناختن الگوهایی که قبلاً دیدیم و به ذهنمون آشناست. ممکنه براتون جالب نباشه، اما اگه اینجوری به مسائل نگاه کنید، بعد از یه مدت، از دیدن بعضی از مسائل لذت خواهید برد.

یاد ایامی...: در سال 1369 که من کلاس دوم ریاضی بودم، ما یک معلم داشتیم که درس هندسه و جبر رو بهمون یاد می‌داد. اون دانشجو بود و از اواسط سال دیگه نیومد و ما تا آخر سال تحصیلی بی‌معلم موندیم. در آخر سال امتحانات این دو تا درس مطابق روال هر سال برگزار نشد. یه معلم دیگه از گروه تجربی اومد و به طور فشرده این دو تا درس رو ادامه داد و تموم کرد. البته من سر کلاسهاش نرفتم؛ چون شاغل بودم. خودم خوندم و تمرین کردم و نهایتاً نمرۀ قبولی آوردم. سال بعدش که من باید به سوم دبیرستان می‌رفتم، کلاس سوم دبیرستان در شهر ما تشکیل نشد و ما به یک شهر دیگه رفتیم. سال چهارم دبیرستان در شهر ما رشته ریاضی تشکیل شد و از نو برگشتیم به شهر خودمون. البته ما تا اواسط سال معلم شیمی، ریاضیات جدید، و هندسه تحلیلی نداشتیم. معلم جبر و آنالیز هم تا آخر سال نداشتیم. کلاس ما 19 نفر داشت و اکثر بچه‌ها درس جبر رو افتادن، اما من 20 گرفتم. چون از تابستان سال دوم دبیرستان متوجه شدم که ممکنه بعدها باز هم با کمبود معلم برخورد کنیم و خودم شروع کردم به مطالعه. البته اون سال من هیچ منبعی برای مطالعه نداشتم، جز کتابهای درسی سال دوم دبیرستان. کتاب جبر معادله‌های درجه 2 رو درس داده بود. واسه همین من کلی وقت گذاشتم تا بتونم معادله‌های درجه 3 رو حل کنم. آخرش هم موفق شدم. کلی فرمول و روابط به دست آوردم و توی یک دفتر یادداشت کردم. این کار رو سالهای بعد هم ادامه دادم. البته بعدها یه مجله‌ای در اومد به اسم برهان، که توی یکی از شماره‌هاش من دیدم که اکثر اون فرمولهایی که من برای معادله‌های درجه 3 به دست آوردم، توش هست. در هر صورت این الگوها، که به نام "احساس ریاضی" اینجا مطرح کردم، از تابستان سال دوم دبیرستان، به دلیل نبود امکانات، توی ذهن من شکل گرفت، و در سالهای دانشگاه ادامه پیدا کرد. همون طور که در مثالهایی که آوردم می‌بینید، همۀ مثالها از همون مقطع دبیرستان هستند.

مهدی مسافر
http://mmnrecipes.blogspot.com