



برازش با اسپلاین مکعبی

New.7 اسپلاین مکعبی

شکل کلی هر چندجمله‌ای تکه‌ای درجه سوم منتسب به n نقطه معلوم، به صورت زیر است.

$$y = S(x) = \begin{cases} p_1(x) & x_1 \leq x \leq x_2 \\ p_2(x) & x_2 \leq x \leq x_3 \\ \vdots & \vdots \\ p_{n-1}(x) & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

که در آن $p_j(x)$; $j=1,2,\dots,n-1$ بیانگر چندجمله‌ایهای درجه سه است.

به هر کدام از نقاط، یک گره می‌گویند. چنان که می‌بینید، از بین هر دو گره متوالی یک چندجمله‌ای گذشته است. گره‌ها به ترتیب صعودی مرتب شده‌اند:

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$$

برای مشخص کردن این چندجمله‌ای تکه‌ای باید $4(n-1)=4n-4$ ضریب ناشناخته را به دست آورد. این چندجمله‌ای تکه‌ای در صورتی بیانگر یک اسپلاین مکعبی است که شرایط زیر را داشته باشد.

• از همه گره‌ها بگذرد؛

$$p_j(x_j) = y_j ; j = 1,2,3,\dots,n-1 , p_{n-1}(x_n) = y_n$$

• در گره‌های درونی پیوسته باشد؛

$$p_j(x_{j+1}) = p_{j+1}(x_{j+1}) ; j = 1,2,3,\dots,n-2$$

• شیب آن در گره‌های درونی پیوسته باشد؛

$$p'_j(x_{j+1}) = p'_{j+1}(x_{j+1}) ; j = 1,2,3,\dots,n-2$$

• خمش آن در گره‌های درونی پیوسته باشد؛

$$p''_j(x_{j+1}) = p''_{j+1}(x_{j+1}) ; j = 1,2,3,\dots,n-2$$

از اعمال این شرایط بر چندجمله‌ای تکه‌ای بالا، چنان که می‌بینید، $(n-1)+1+3(n-2)=4n-6$ معادله به دست می‌آید. بنابراین دو شناسه آزاد برای تعیین یگانه اسپلاین باقی می‌ماند. پس می‌توان دو شرط دیگر برای آن گذاشت تا تعداد معادله‌ها با تعداد ناشناخته‌ها یکی شود. از آنجایی که شرایط گوناگونی را می‌توان برای یافتن دو معادله دیگر برگزید، خانواده‌ای از پاسخهای دو - شرطی موجود است. در اینجا به چند تا از آنها اشاره می‌کنیم:

1. گزینش شیب مناسب برای اسپلاین در کرانه‌ها.

▪ در این حالت¹:

$$2h_1 y_1'' + h_1 y_2'' = 6 \left(\frac{y_2 - y_1}{h_1} - y_1' \right)$$

$$h_{n-1} y_{n-1}'' + 2h_{n-1} y_n'' = 6 \left(y_n' - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \right)$$

2. گمان صفر برای مشتق دوم اسپلاین در کرانه‌ها؛ به چنین اسپلاینی، اسپلاین طبیعی² گفته می‌شود.

▪ در این حالت:

$$y_1'' = 0$$

$$y_n'' = 0$$

3. برابر گرفتن مشتق دوم اسپلاین گره‌های کرانه‌ای با گره‌های درونی مجاور کرانه‌ها. در این صورت

چند جمله‌ایهای کرانه‌ای سهمی هستند.

▪ در این حالت:

$$y_1'' - y_2'' = 0$$

$$y_{n-1}'' - y_n'' = 0$$

4. گمان پیوستگی مشتق سوم اسپلاین در گره‌های درونی مجاور کرانه‌ها. این گمان معادل با این است که

y_1'' را از برونمایی y_2'' و y_3'' به دست آوریم و y_n'' را از برونمایی y_{n-2}'' و y_{n-1}'' پس در این حالت، در

حقیقت با گره‌های کرانه‌ای همانند گره‌هایی مستقل رفتار نمی‌کنیم. به همین دلیل، به چنین شرطی، شرط

not a knot می‌گویند.

▪ در این حالت:

$$h_2 y_1'' - (h_1 + h_2) y_2'' + h_1 y_3'' = 0$$

$$h_{n-1} y_{n-2}'' - (h_{n-1} + h_{n-2}) y_{n-1}'' + h_{n-2} y_n'' = 0$$

... 5

با تغییری در شیوه به دست آوردن ضرایب، می‌توان تعداد ناشناخته‌ها را از $4n - 4$ به n کاهش داد. بیانهای متفاوتی

از این مسأله در کتابهای گوناگون آمده است. در اینجا تنها نتایج یکی از بیانها را به طور خلاصه می‌آوریم³:

با استفاده از برابری زیر معادله‌های لازم برای به دست آوردن مشتق دوم تابع در گره‌های درونی را می‌نویسیم.

$$h_{j-1} y_{j-1}'' + 2(h_{j-1} + h_j) y_j'' + h_j y_{j+1}'' = 6 \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_{j-1}} \right); \quad h_j = x_{j+1} - x_j, \quad j = 2, 3, \dots, n-1$$

¹ با توجه به اینکه در روش پیش رو معادله‌ها برحسب مشتق دوم تابع بیان می‌شوند، این شرایط را هم برای مشتق دوم بیان می‌کنیم.

² Natural Spline

³ Ref: Press, W.H.; et. al., *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1990.

این برابری بیانگر یک دستگاه معادلات خطی است، که $n-2$ معادله و n ناشناخته دارد. با اعمال دو شرط دیگر، که پیشتر گفته شد، 2 معادله دیگر به دست می‌آید. پس n ناشناخته و n معادله خطی در دست است. ناشناخته‌های این دستگاه معادلات خطی، مقادیر مشتق دوم تابع در گره‌هاست.

پس از پاسخ‌یابی دستگاه معادلات خطی بالا، اکنون سیاهه‌ای چون سیاهه زیر در دست است.

x	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_{n-1}	y_n
y''	y_1''	y_2''	y_3''	...	y_{n-1}''	y_n''

اکنون اگر چند جمله‌ایهای درجه سه، $p_j(x)$; $j=1,2,\dots,n-1$ ، را به صورت

$$p_j(x) = a_j(x-x_j)^3 + b_j(x-x_j)^2 + c_j(x-x_j) + d_j; \quad x_j \leq x \leq x_{j+1}, \quad j=1,2,\dots,n-1$$

برگزینیم، به یاری این سیاهه، ضرایب اسپلاین مکعبی به سادگی از دستورهای زیر به دست می‌آید.

$$a_j = \frac{y_{j+1}'' - y_j''}{6h_j}$$

$$b_j = \frac{y_j''}{2}$$

$$c_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h_j} - \frac{h_j(2y_j'' + y_{j+1}'')}{6}$$

$$d_j = y_j$$

Pitfall



گوشزد

- هرگاه در یافتن اسپلاین مکعبی، در صورت مسأله مشخص نشده باشد که از چه شرایطی استفاده شود، از شرط not a knot استفاده کنید.
- برای پاسخ‌یابی دستگاه معادلات خطی می‌توانید از چرخه گوس - سایدل استفاده کنید.

نمونه - یک اسپلاین مکعبی برای سیاهه زیر بیابید.

x	0	1	1.5	2.25	2.5
y	2	4.4366	6.7134	13.913	18.115

پاسخ:

$$h_1 = 1 - 0 = 1, \quad h_2 = 1.5 - 1 = 0.5, \quad h_3 = 2.25 - 1.5 = 0.75, \quad h_4 = 2.5 - 2.25 = 0.25$$

$$y_1'' + 3y_2'' + 0.5y_3'' = 12.7020$$

$$0.5y_2'' + 2.5y_3'' + 0.75y_4'' = 30.2752$$

$$0.75y_3'' + 2y_4'' + 0.25y_5'' = 43.2512$$

$$0.5y_1'' - 1.5y_2'' + y_3'' = 0$$

$$0.25y_3'' - y_4'' + 0.75y_5'' = 0$$

$$\Rightarrow y_1'' = -1.5899, \quad y_2'' = 3.7052, \quad y_3'' = 6.3527, \quad y_4'' = 16.7212, \quad y_5'' = 20.1773$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cccc} a_1 = 0.8825 & b_1 = -0.7949 & c_1 = 2.3490 & d_1 = 2 \\ a_2 = 0.8825 & b_2 = 1.8526 & c_2 = 3.4067 & d_2 = 4.4366 \\ a_3 = 2.3041 & b_3 = 3.1763 & c_3 = 5.9211 & d_3 = 6.7134 \\ a_4 = 2.3041 & b_4 = 8.3606 & c_4 = 14.5738 & d_4 = 13.913 \end{array}$$

مهدی مسافر

mmnrecipes@yahoo.com

<http://mmnrecipes.blogspot.com>